# Mallinnus kärkisulkufunktioilla palkkirakenteiden analyysissä

30.8.2019

# Johdanto

Rakenteiden mitoittajalle on tärkeää tietää, miten palkki toimii erilaisissa kuormitustapauksissa. Käytännössä tämä tarkoittaa palkin sisäisten rasitussuureiden: leikkausvoiman *Q* ja taivutusmomentin *M* sekä palkin taipuman *v* määrittämistä. Rasitussuureet aiheuttavat palkkiin jännityksiä, joiden suurimmat arvot ovat esimerkiksi puurakenteisen palkin mitoituksessa tärkeitä mitoitusarvoja palkin materiaalista riippuvien lujuusarvojen lisäksi. Palkin suurimmalle taipumalle on mitoitusohjeissa annettu raja-arvo, jota ei saa ylittää. Poikittaiskuormitetun palkin toimintaa kuvataan kahdella differentiaaliyhtälöllä, joissa tarvitaan tieto palkin taivutusmomentin ja kuormituksen jakaumasta (Beer, Johnston 1992). Palkin kuormitus on usein epäjatkuva, jolloin ns. kärkisulkufunktiot tai Macaulayn funktiot (Macaulay 1919) mahdollistavat tällaisenkin kuormitustapauksen mallinnuksen laskennan kannalta suoraviivaisesti. Artikkelin lopussa on mainittu muutamia lähteitä, joista aiheesta kiinnostunut lukija löytää lisää tietoa. Lähde (Salmi, Kuula 2012) sisältää myös ratkaistuja esimerkkitehtäviä, jotka vielä selventävät kärkisulkufunktioiden käyttöä palkkitehtävissä.

# Palkin toimintayhtälöt

Seuraavassa esitettävät palkin toimintaa kuvaavat yhtälöt perustuvat teknilliseen taivutusteoriaan. Staattisesti määrätyn palkin taipuman *v* differentiaaliyhtälö on

$$-EI\,v'' = M$$

(1)

missä *EI* on palkin taivutusjäykkyys ja $v''$ taipuman toinen derivaattaa palkin pituusakselin suuntaisen koordinaatin (usein *x*) suhteen. Yhtälön (1) oikealla puolella oleva taivutus-momentti ei ole epäjatkuvan kuormituksen tapauksessa esitettävissä yhdellä tavanomaisella lausekkeella. Tässä epäjatkuvalla kuormituksella tarkoitetaan pistekuormia sekä jakaantuneita kuormia, jotka eivät vaikuta koko palkin matkalla. Kärkisulkufunktioiden avulla taivutusmomentin mallinnus sujuu kuitenkin ongelmitta. Integroimalla differentiaaliyhtälö (1) peräkkäin kaksi kertaa ja hyödyntämällä palkin tukiehtoja, saadaan taipuman ratkaisu *v*(*x*) lopuksi selville.

Staattisesti määräämättömän palkin taipuman differentiaaliyhtälö on

$$EI\, v'''' = q$$

(2)

missä $v''''$ on taipuman neljäs derivaatta ja *q* kuvaa palkin poikittaista kuormitusta, jonka mallinnus epäjatkuvan kuormituksen tapauksessa tehdään kärkisulkufunktioiden avulla. Integroimalla differentiaaliyhtälö (2) peräkkäin neljä kertaa ja hyödyntämällä palkin tukiehtoja, saadaan taipuman ratkaisu *v*(*x*) selville. Tämän jälkeen saadaan taivutusmomentille ratkaisu *M*(*x*) helposti yhtälön (1) avulla ja edelleen leikkausvoimalle ratkaisu *Q*(*x*) yhtälön $Q = M'$ avulla.

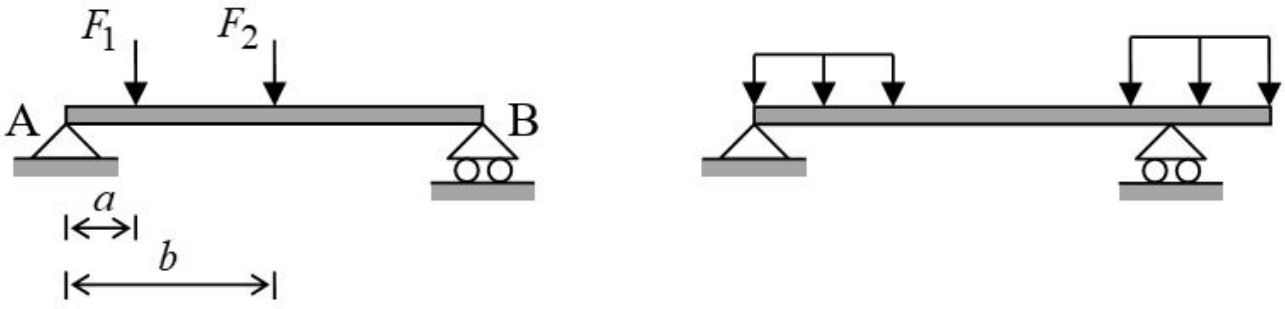
# Taivutusmomentin mallinnus

Tapauksessa, missä palkin poikittainen kuormitus on esitettävissä yhdellä tavanomaisella funktiolla, differentiaaliyhtälön (1) hyödyntäminen on suoraviivaista. Tyypilliset esimerkit tällaisesta kuormituksesta ovat tasainen kuorma sekä lineaarisesti muuttuva kuorma (Kuva 1).



**Kuva 1:** Jatkuvia kuormia staattisesti määrätyllä palkilla.

Pistekuormien tapauksessa sekä tapauksessa, missä on esimerkiksi tasaista kuormaa vain osalla palkkia (Kuva 2), päädytään laskennallisesti huomattavasti työläämpään tapaukseen. Tällöin taivutusmomentin lauseke joudutaan määrittämään erikseen jokaiselle osavälille. Vastaavasti jokaisella osavälillä on oma taipuman lausekkeensa (Falsone 2002). Tukiehtojen lisäksi vaaditaan, että osavälien liittymäkohdissa taipuman ja kiertymän on oltava jatkuvia. Näitä lisäehtoja kutsutaan jatkuvuusehdoiksi.




**Kuva 2**: Epäjatkuvia kuormia staattisesti määrätyllä palkilla.

# Kärkisulkufunktiot taivutusmomentin mallinnuksessa

Kärkisulkufunktiot mahdollistavat taivutusmomentin mallintamisen yhdellä lausekkeella koko palkilla vaikka kuormitus olisi kuvassa 2 esitetyn kaltainen epäjatkuva. Tästä on se etu, että palkin osien liittymäkohtien jatkuvuusehdoista voidaan luopua. Näin differentiaaliyhtälön (1) ratkaiseminen on yhtä yksinkertaista kuin jatkuvan kuormituksen (Kuva 1) tapauksessa.

Kärkisulkufunktiot määritellään eksponentin $n$ arvoilla $n = 0, 1, 2, \cdots$ seuraavasti

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)^n, & x \geq a \end{cases}$$

(3)

Kohdassa, missä $x = a$, on pistekuorma tai tasainen kuorma muuttuu. Lisäksi, kun $x > a$, muuttuvat kärkisulkufunktioesityksen sulut $\langle \quad \rangle$ tavallisiksi suluiksi $( \quad )$. Eksponentin arvolla $n = 0$ voidaan esittää taivutusmomentti, joka muuttuu pistemäisen momenttikuorman kohdalla hyppäyksenomaisesti. Kuvan 2 vasemmanpuoleisen kuormitustapauksen taivutusmomentti voidaan esittää eksponentin arvolla $n = 1$, koska taivutusmomentin jakauma on murtoviiva. Taivutusmomentin lausekkeelle saadaan

$$M = R_A x - F_1 \langle x-a \rangle^1 - F_2 \langle x-b \rangle^1$$

(4)

missä $R_A$ on tuen A pystytukireaktio ja muuttujan $x$ nollakohta on tuella A. Kuvan 2 oikeanpuoleisessa kuormitustapauksessa tarvitaan eksponenttia $n = 2$, koska tasaisten kuormien osalla taivutusmomentti on tunnetusti toista astetta.

Integroitaessa differentiaaliyhtälöä (1) tarvitaan kärkisulkufunktioiden (3) integraalifunktioita. Ne saadaan kaavasta

$$\int \langle x-a \rangle^n \, dx = \frac{1}{n+1} \langle x-a \rangle^{n+1} + C$$

(5)

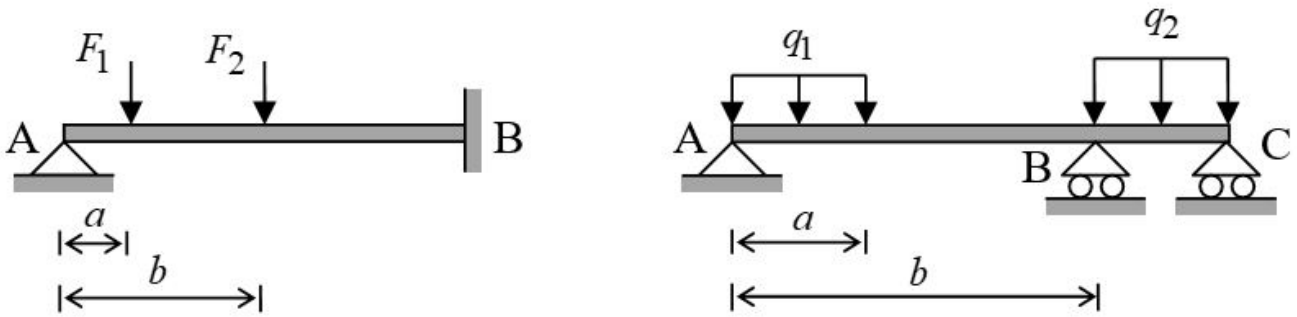
eksponentin $n = 0, 1, 2, \cdots$ arvoilla . *C* on integrointivakio.

# Kärkisulkufunktiot kuormituksen mallinnuksessa

Kuvien 2 ja 3 kaltaisissa kuormitustapauksissa kuormitus on epäjatkuva. Epäjatkuvien kuormitusten mallintamisessa kärkisulkufunktioilla tarvitaan eksponenttien $n = 0, 1, 2, \cdots$ lisäksi negatiivinen eksponentti *n* = -1, jota vastaava kärkisulkufunktio määritellään kaavalla

$$\langle x-a \rangle^{-1} = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ 1, & x = a \end{cases}$$

(6)




**Kuva 3**: Epäjatkuvia kuormia staattisesti määräämättömällä palkilla.

Eksponenttia *n* = -1 tarvitaan pistekuormien mallinnuksessa. Kuvan 3 vasemmanpuoleisen kuormitustapauksen kuormitus *q* esitetään kärkisulkufunktioiden avulla seuraavalla lausekkeella

$$q = F_1 \langle x-a \rangle^{-1} + F_2 \langle x-b \rangle^{-1}$$

(7)

Kuvan 3 oikeanpuoleisen kuormitustapauksen kuormitus on

$$q = q_1 - q_1\langle x-a\rangle^0 + q_2\langle x-b\rangle^0 - R_B\langle x-b\rangle^{-1}$$

(8)

missä $R_B$ on tuen B pystytukireaktio. Kärkisulkufunktion (6) integraalifunktio on

$$\int \langle x-a\rangle^{-1}\,dx = \langle x-a\rangle^0 + C$$

(9)

# Kärkisulkufunktioiden derivointikaavat

Staattisesti määräämättömän palkin tapauksessa tarvitaan myös kärkisulkufunktioiden derivaattoja. Kaava niiden määrittämiseksi on

$$\frac{d}{dx}\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} \langle x-a\rangle^{n-1}, & \text{kun } n=-1,0 \\ n\langle x-a\rangle^{n-1}, & \text{kun } n=1,2,\ldots \end{cases}$$

(10)

**Lähteet**


Beer, F.P., Johnston, E.R Jr. 1992: Mechanics of Materials, McGraw-Hill Book Company, Second Edition.

Falsone, G. 2002: The Use of Generalised Functions in the Discontinuous Beam Bending Differential Equations, International Journal of Engineering Education, (18), No 3, 337-343.

Macaulay, W.H. 1919: Note on the deflection of beams, Messenger of Mathematics, (48), 129-130.

Salmi, T, Kuula, K. 2012: Rakenteiden mekaniikka, Pressus Oy, 65-70.

**Martti Perälä** (TkL)
Kirjoittaja työskentelee lehtorina SeAMK Tekniikassa.